

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

- α)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- β)** Να βρείτε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της να σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.
- γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει $a > 1$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(a, f(a))$ να διέρχεται από το σημείο στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο η f .
- δ)** Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της.
- ε)** **i.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (f \circ g)(x)$ με $g(x) = e^x$ έχει μοναδική λύση κ με $\kappa \in (0,1)$.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της f και της $f \circ g$ και της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία που παρουσιάζουν ολικό ελάχιστο, ως συνάρτηση του κ .