

Δίνεται η συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $f(x)=1-x^2(1-\ln x)$ .

- α)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο ακριβώς σημεία, το ένα με τετμημένη ίση με 1 και το άλλο με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα  $(2,e)$ .
- γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $a>\sqrt{e}$  τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(a,f(a))$  να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμπής της.
- δ)** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της στο σημείο της  $(1,f(1))$  και την ευθεία  $x=\lambda$  με  $0<\lambda<1$ .

Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\lambda\rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .

- ε)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f\circ g$  με  $g(x)=\frac{1}{x}$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f\circ g$  την τέμνει.
- στ)** **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h:[e,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $h(x)=f(x)$  αντιστρέφεται.
- ii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της  $h$  και της αντίστροφής της  $h^{-1}$  έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.