

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x$ .

- α)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .
- β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε μοναδικό σημείο με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(e, e^2)$ .
- γ)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει μοναδικό σημείο καμπής στο διάστημα  $(1, \sqrt{e})$ .
- δ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \geq e$  ισχύει ότι  $\ln^2 x - x \ln x + \left(2 - \frac{2}{e}\right)x + 1 \leq e$ .
- ε)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο που παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τέμνει ξανά μόνο μία φορά.

**στ)** Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \begin{cases} \frac{(f \circ g)(x)}{g^2(x)} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  με  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

- i.** Να δείξετε ότι η  $h$  είναι συνεχής στο  $0$ .
- ii.** Να εξετάσετε αν η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ .
- ζ)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και την εφαπτομένη της στο τοπικό της ελάχιστο.