

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=2x\ln x-x^2-x$.

- α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από τη αρχή των αξόνων.
- γ)** Να δείξετε ότι η ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f έχει άλλο ένα κοινό σημείο με αυτήν.
- δ)** Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση $g:(0,e]\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=x\ln x-x^2+1$. Να βρείτε τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και την ευθεία $x=\lambda$ με $0<\lambda<2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda\rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- στ)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ h$ με $h(x)=\frac{1}{x}$.
 - ii.** Να δείξετε ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=(f\circ g)(x)$ είναι το 1.
 - iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $f\circ g$ και την ευθεία $x=e$.