

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ .

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων .
- β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $0$  .
- γ)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^{2\sqrt{x}} = \frac{1}{e}$  με  $x > 0$  .
- δ)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει τουλάχιστον δύο εφαπτομένες κάθετες μεταξύ τους, οι οποίες δεν είναι παράλληλες στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  .
- ε)** Έστω ένα σώμα το οποίο βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων και ξεκινά να κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της  $f$  . Η τετμημένη του σημείου στο οποίο βρίσκεται το σώμα κάθε χρονική στιγμή αυξάνεται με ρυθμό  $1 \text{ cm/s}$  . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  , τη χρονική στιγμή που το σώμα τέμνει τον άξονα  $x'x$  .
- στ)** **i.** Να βρείτε την αρχική συνάρτηση  $F$  της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.  
**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$  .