

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln^2 x$ .

- α)** Να δείξετε ότι ο άξονας  $y'y$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
- γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία σχηματίζει με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  ισοσκελές τρίγωνο.
- δ)** Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ε)** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων καθώς και την ελάχιστη αυτή τιμή.
- στ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική της  $f$ , της ευθείας ( $\varepsilon$ ) και της ευθείας  $x = e$ .
- ζ)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = e^{-\sqrt{x}}$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται.
  - iii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της  $h$  και της αντίστροφής της  $h^{-1}$  έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.