

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x(\ln^2 x-3\ln x+3)$.

- α)**
- i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - ii.** Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία που παρουσιάζει ακρότατα την ξανά σε μοναδικό σημείο.
 - iii.** Αν $e < \alpha < 3$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(\ln x - 1)^2 = \frac{x \ln x - 2x + \alpha}{x}$.
- β)**
- i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - ii.** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda < \sqrt{e^3}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- γ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ που σχηματίζουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy .
- δ)** Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq \sqrt{e}$ ισχύει ότι $x(\ln^2 x - 12\ln x + 13) \geq 8\sqrt{e}$.
- ε)** Έστω οι συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ και $h:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $h(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ και $f=g\circ h$.
- i.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .
 - ii.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=3-g(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της φ και της αντίστροφής της φ^{-1} .
- στ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f\circ q(x)$ με $q(x)=\frac{1}{x}$ έχει μοναδική λύση το 1.