Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $2\sqrt{1-x}f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x<1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^{\sqrt{1-x}}$ για κάθε $x\le 1$.

β) **i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $2\sqrt{1-x}=\ln\left[\etaμ^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$ στο διάστημα $(0,1]$.

γ) **i.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $e^{1-\sqrt{1-x}}(2-x)<2$.

δ) **i.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτησή της f^{-1}.

ii. Έστω Α το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα yy' και Β το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τον άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} και την ευθεία ΑΒ.

iii. Έστω η συνάρτηση

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ με } g(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma &, x<1 \\ f^{-1}(x) &, x\ge 1\end{cases} \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R} \text{ με } \alpha\ne 0$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Β την τέμνει πάνω στον άξονα yy'. Το σημείο $\Gamma(1,1)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της g. Να βρείτε τα α, β και γ.