

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x + (\alpha - 1)x^2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής σε σημείο με τετμημένη ίση με $\frac{\alpha}{e}$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- β)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ με $0 < \kappa < \frac{4}{e^2}$.
- γ) i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη της (ζ) η οποία διέρχεται από το σημείο καμπής της .
- ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ϵ) και (ζ) .
- δ)** Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της τεταγμένης λ του σημείου τομής μιας εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.
- ε)** Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f . Η γραφική παράσταση της F διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.