

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{\ln x}{x} - x$.

- α)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στην πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$.
- γ)** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Στη συνέχεια να εξετάσετε τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης της f με την εφαπτομένης της στο σημείο καμπής της .
- δ) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = e^{-x}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και f έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.
- ii.** Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται . Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και h^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με θετική τετμημένη .
- ε)** Αν $A(x_0, 0)$ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ και E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$, να δείξετε ότι $E < \frac{1}{8}$.
- στ)** Αν a είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A με τον άξονα $y'y$, να δείξετε ότι $a < 1$.
- ζ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο της $(1, f(1))$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$ και $x = e$.