Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ για κάθε $x\neq 0$ και $f(0)=1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$ με $0<\lambda<2$ και $x=2$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\lambda\to 0}E(\lambda)\geq 1$.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, σε σημείο της με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-2,-1)$.

ε) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , όπου $g(x)=x\ln x$, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη α η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1,\sqrt{e})$.

στ) Έστω η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $h(1)=1$ και $f(x)=(h\circ\varphi)(x)$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\varphi(x)=e^{x}$.

i. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει $h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$ και στη συνέχεια να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο της $(1,h(1))$.

ii. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις των h και h^{-1} και η ευθεία $y=x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(1,h(1))$.

Εκδόσεις Πατάκη