

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + e^{-x}$.

- α)** Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
- β)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δύο εφαπτομένες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- γ)** Να δείξετε ότι $f(x) + x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$.
- ε)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.
- στ) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ με $g(x) = \ln x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο της $(1, f(1))$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της που σχηματίζει με τους άξονες ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.
- ii.** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f \circ g$, της (ε) και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.