

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=(x-\alpha)^2+\ln x$, όπου $\alpha>0$.

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(e,f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha=e$ και επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της f έχει άλλη μία εφαπτομένη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- β)** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f , την πλάγια ασύμπτωτη της f' στο $+\infty$ και την οριζόντια ασύμπτωτη της f'' στο $+\infty$.
- γ)** Να δείξετε ότι η f έχει δύο τοπικά ακρότατα με θέσεις $x_1\in\left(\frac{1}{2e},\frac{1}{e}\right)$ και $x_2\in(e-1,e)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία τοπικών ακροτάτων την επανατέμνουν.
- δ) i.** Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός από το σημείο επαφή τους.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την (ε) και την ευθεία $x=1$.
- ε)** Έστω η συνάρτηση $g:[e,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)$. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και g^{-1} έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.