

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x \ln(1-x)}{2} & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ (1-x)e^{\frac{x}{2}} & , x > 0 \end{cases} .$$

- α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .
- β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** **i.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο της $(1, f(1))$ και την ευθεία $x = 1 - e$.
- δ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(a, f(a))$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της στο σημείο $(2, f(2))$.
- ε)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$, όπου $g(x) = \ln x$.
ii. Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της h με τετμημένη $x > 1$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με \sqrt{e} cm/s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y , τη χρονική στιγμή που τέμνει τον άξονα $x'x$.