

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{e}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ .

- α)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .
- β)** **i.** Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση  $x_0$  που βρίσκεται στο διάστημα  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{e}\right)$ .
- ii.** Να δείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > \frac{1}{e}$ .
- γ)** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda > \frac{1}{e}$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .
- δ)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = e^{-x}$  και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $h$  έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $h$ , την εφαπτομένη της στο σημείο που τέμνει τον άξονα  $x'x$  και τον άξονα  $y'y$ .
- ε)** **i.** Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = \begin{cases} (f \circ t)(x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  με  $t(x) = \frac{1}{x}$ .
- Να δείξετε ότι η  $\varphi$  είναι συνεχής στο 0 και παραγωγίσιμη στο 0.
- ii.** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\varphi$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $0 < \lambda < e$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$ .