

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} - x + 1 & , x \leq 1 \\ \alpha + \beta \cdot \frac{\ln x}{x} & , x > 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.
- β)** **i.** Να βρείτε την ασύμπτωτη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την (ϵ) , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.
- γ)** **i.** Να βρείτε την ασύμπτωτη (ζ) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
ii. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την (ζ) και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > 1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- δ)** Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_0 που βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.
- ε)** **i.** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της με τη μεγαλύτερη τετμημένη τέμνει ξανά τη γραφική παράσταση της f .
- στ)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ζ)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = 2 - x$.
ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(h(x) - 1) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x) - 1} \right) \right]$.