

Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

- α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .
- β)** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο οποίο η εφαπτομένης της τέμνει τον άξονα yy' σε σημείο στο οποίο η τεταγμένη παίρνει ελάχιστη τιμή.
- γ)** Δίνεται, επιπλέον, η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$.
- i.** Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0\in(\sqrt{e},2)$.
- ii.** Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda>0$, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(\lambda,f(\lambda))$ είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $(\lambda,g(\lambda))$.
- iii.** Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $2f(x)\leq x-1$.
- δ)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $g\circ h$ με $h(x)=\sqrt{x}$ και να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $(g\circ h)(x)\geq g(x)$.
- ii.** Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και $g\circ h$ και την ευθεία $x=\alpha$ με $0<\alpha<1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha\rightarrow 0}E(\alpha)$.
- ε)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $g\circ\varphi$ με $\varphi(x)=e^{1-x}$ και να βρείτε την ασύμπτωτή της (ε) στο $+\infty$.
- ii.** Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της $g\circ\varphi$ ακριβώς σε ένα σημείο και τη γραφική παράσταση της g ακριβώς σε ένα σημείο.
- iii.** Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$ ισχύει ότι $(g\circ\varphi)(x)\geq g(x)$.