

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (a-x)e^{\beta x}$, όπου $a, \beta \neq 0$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής πάνω στον άξονα $y'y$ και επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου της f' τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

- α) Να δείξετε ότι $a=1$ και $\beta=2$.
- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και το σύνολο τιμών της.
- γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1-x}}\right) = x$ για κάθε $x < 1$ και $\lambda \in \left(0, \frac{e}{2}\right)$.
- δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 2x$.
- ε) Να δείξετε ότι για κάθε $x_0 < 0$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ επανατέμνει τη γραφική παράσταση της f .
- στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο καμπής της, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = -2$.