

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1]$.
- γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = \frac{1}{x}$ και να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.
- δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$.
- ε) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της φ .