

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x + \eta \mu x}{2 - \eta \mu x}$.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε $x < -1$ ισχύει $x - 1 \leq f(x) \leq \frac{x+1}{3}$ και να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και yy' μόνο στην αρχή των αξόνων.
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \frac{x}{2}$ στο διάστημα $[-\pi, 0]$.
- δ) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.
- ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\pi - x) = f(\pi + x)$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον τρεις λύσεις στο \mathbb{R} .