

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{1}{2}, & x < 0 \\ \frac{x^3-5x+4}{4(1-x)}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x + \sin(\pi x)}{2 - \sin(\pi x)} + \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
- β) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{2x+1}{6} \leq f(x)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.