

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & , x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 + 2x} & , x \geq 0 \end{cases}$.

- α)** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- β)** Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
- γ) i.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και ότι $f([0, +\infty)) = (-1, 0]$.
- ii.** Έστω η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της g^{-1} .
- δ)** Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) \geq -\frac{2}{\pi}$ και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -\frac{2}{\pi}$.