

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2)$, η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x - 1$.

Επιπλέον, ισχύουν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{xf(x)-x^2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ f)(x)}{f(x)}$ **iv.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

β) Έστω η συνεχής συνάρτηση $h = g \circ f$ με $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h .

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} h(x) & , x \in A_h \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.