

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} - x - \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{1 - \sin(\pi x)}{\pi^2 x^2} - x, & x > 0 \end{cases}$ .

- α) i.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $-x \leq f(x) \leq -x + \frac{2}{\pi^2 x^2}$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(h(x))$  όπου  $h(x) = \varepsilon \pi x$ .
- β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής.
- γ)** Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- δ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε σημεία με θετική τετμημένη και τουλάχιστον σε ένα από αυτά, η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .
- ε) i.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \leq 0$  ισχύει  $2f(x) = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^2 + 3} + 2x + 1}$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ .
- iii.** Έστω η συνάρτηση  $g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x)$ . Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της  $g^{-1}$ .