Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu x}{x+1} & , \quad x\ge 0\\[2ex] \dfrac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & , \quad x<0\end{cases}$.

α) **i.** Να δείξετε ότι για κάθε $x\ge 0$ ισχύει $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1}\le f(x)\le\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\dfrac{x}{2}\right]$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

δ) **i.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση x_0 στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

ii. Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi x_0=-\sqrt{x_0-1}$.

ε) Έστω, επιπλέον, οι συναρτήσεις $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ και $h:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\quad \text{και}\quad h(x)=\begin{cases}(f\circ g)(x) & , \quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2ex] 0 & , \quad x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Να δείξετε ότι η h είναι συνεχής.