

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} & , x > 0 \end{cases}.$$

- α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- β)** Να υπολογίσετε τα όρια: **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, **ii.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- γ)** Αν $g(x) = \varepsilon\varphi x$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [f(g(x)) - g(x)]$.
- δ)** Αν $h(x) = \sqrt{x} - x$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(h(x))}{x} \right]$.
- ε)** **i.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \frac{1}{2}$.
ii. Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{8\alpha^2 - 1}{(4\alpha^2 - 1)^2}$.
iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{\eta\mu(2f(x) - 1)}{2f(x) - 1} \right]$.
- στ)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $t = \varphi \circ f$ με $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} t(x)$.
- ζ)** **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\delta: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\delta(x) = f(x)$ αντιστρέφεται.
ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $\delta(x) > \delta^{-1}(x)$.