

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln^2 x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- α)** Να δείξετε ότι η f είναι στο 0 και παραγωγίσιμη στο 0 .
- β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.
- γ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δύο σημεία καμπής στο διάστημα $(0,1)$.
- δ)** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι τέμνει τη γραφική παράσταση της f και σε άλλο σημείο εκτός από την αρχή των αξόνων και το σημείο επαφής.
- ε)** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$, όπου $g(x) = e^{-x}$ και να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ακριβώς τρία σημεία τομής.
- στ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.