

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β) Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτές της και το σύνολο τιμών της.
- γ) Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής, το  $(0, f(0))$  και το  $(\rho, f(\rho))$  με  $\rho \in (1, 2)$ .
- δ) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ , όπου  $g(x) = \ln x$ .  
ii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $h$  έχουν μοναδικό σημείο τομής με τετμημένη  $x_0 \in (1, e)$ .
- ε) i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx$ .  
ii. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(x) dx \leq \ln(e - 1)$ .