

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \alpha \ln x - \ln^2 x \text{ και } g(x) = x^2 - \beta, \text{ όπου } \alpha, \beta > 0$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο πάνω στον άξονα  $x'x$ .

**α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 1$ .

**β) i.** Να δείξετε ότι  $g(x) \geq f(x)$  για κάθε  $x > 0$ .

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  και της ευθείας  $x = e$ .

**γ)** Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \frac{\ln^2 x - x^2 - 1}{x}$ .

**i.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $h$  έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

**ii.** Να δείξετε ότι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$  την τέμνει ακριβώς σε δύο σημεία και να τα βρείτε.