

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\left(2-\frac{\alpha}{x}\right)(\beta-\ln x)$, όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

- α)**
- i.** Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$.
 - ii.** Να δείξετε ότι $1 - \ln 2 < \frac{1}{e}$.
 - iii.** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονotonία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της και το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές του $x \in (0, +\infty)$.
- γ)**
- i.** Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής $(\lambda, f(\lambda))$ με $\lambda \in (\sqrt{e}, 2)$.
 - ii.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη κ , να δείξετε ότι το κ παίρνει τη μέγιστη τιμή του για $x_0 = \lambda$.
- δ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{1}{x}$ ακριβώς σε δύο σημεία, στο $(1, f(1))$ και στο $(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\sqrt{e}, 2)$.
- ε)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.
- στ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.