Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και παραγωγίσιμη στο 0.

β) Να δείξετε ότι $0<f(x)<1$ για κάθε $x>0$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) **i.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -1.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)\le \dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}$ για κάθε $x>0$.

ε) Αν λ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ με $x_0>0$, να δείξετε ότι το λ έχει ελάχιστη τιμή όταν το $(x_0,f(x_0))$ είναι το σημείο καμπής της f.

στ) **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$ με $g(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

ii. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\displaystyle\int_{\frac{1+\lambda}{e^{\lambda}}}^{\frac{2}{e}} h^{-1}(x)\,dx$, $0<\lambda<1$.

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<x$.