

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x^2) & , x \in (-1,1) \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$.

- α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1 και ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 .
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .
- γ)** Να δείξετε ότι η f έχει ολικό μέγιστο το 0 για $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ και τοπικό ελάχιστο για $x_3 \in (\rho, 1)$, όπου $(\rho, f(\rho))$ είναι το σημείο καμπής της f .
- δ)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_3, f(x_3))$ την τέμνει και σε άλλο σημείο της.
- ε)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , με $g(x) = (1-x^2)\ln(1-|x|)$ έχουν ακριβώς δύο σημεία τομής στο διάστημα $(-1,1)$.
- στ)** **i.** Να βρείτε την αρχική F της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.