

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 - 1)\ln x + 1$ και $g(x) = x^2(1 + 2\ln x) - 1$.

- α)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο $(1, 0)$.
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ)** Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- δ)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ε)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , όπου $h(x) = x^2 - 1 + \ln^2 x$, έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία.
- στ)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda < 1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.