

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 2 - e^{ax} & , x < 0 \\ \beta + \ln(1+x) & , x \geq 0 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί}$$

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.
- β)** **i.** Να δείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- ii.** Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
- iii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ακριβώς δύο σημεία τομής, το $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1 \in (1, e)$ και το $B(x_2, f(x_2))$ με $x_2 \in (-e, -1)$.
- iv.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} στα σημεία A και B σχηματίζουν ρόμβο.
- γ)** **i.** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- ii.** Να δείξετε ότι $f(x) - x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της στο σημείο της $(e-1, f(e-1))$.