Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha x+\beta+\gamma\ln(x^2+1)$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της $(-1,\ln 2)$ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=1$.

β) Να βρείτε τα σημεία καμπής $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ με $x_1<x_2$ της γραφικής παράστασης της f.

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη σε σημείο της $\Gamma(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(x_1,x_2)$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία AB.

δ) Έστω λ η τεταγμένη του σημείου τομής του άξονα yy' με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(\xi,f(\xi))$, όπου $\xi\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το λ παίρνει ελάχιστη τιμή όταν $\xi=x_1$ ή $\xi=x_2$.

ε) **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$ με $g(x)=\sqrt{e^x-1}$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\int_0^\alpha g(x)\,dx \geq \int_0^\alpha \ln(x^2+1)\,dx$.