

Δίνεται η συνάρτηση

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2 \ln x + \alpha x + \beta, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί}$$

Η ευθεία  $(\varepsilon): y = 3x$  είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο κοινό της σημείο με τη γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησή της  $f'$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$ .
- β)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη  $x_0 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ .

Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

- γ)**
- i.** Να εξετάσετε αν η  $g$  είναι συνεχής στο  $0$  και παραγωγίσιμη στο  $0$ .
  - ii.** Να βρείτε το πρόσημο της  $g$  για κάθε  $x \geq 0$ .
  - iii.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  και η ευθεία  $(\zeta): y = -\frac{1}{2}x$  τέμνονται μόνο σε δύο σημεία, στην αρχή των αξόνων και στο  $(x_0, g(x_0))$ .
- δ)**
- i.** Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πραγματικού αριθμού  $k$  ώστε να ισχύει  $\ln x \leq x - k$  για κάθε  $x > 0$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι  $\int_1^2 g(x) dx \leq 6 \ln \frac{4}{3} - \frac{3}{2}$ .