

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha + \ln x}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ \beta - e^{1-x} & , x > 1 \end{cases}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$  και  $\beta = 1$ .
- β) **i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .  
**ii.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(f(x)) = 0$ .
- γ) **i.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μοναδική εφαπτομένη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, σε σημείο της  $(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \in (2, 3)$ .  
**ii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in (0, 1)$  ισχύει ότι  $x^2 \geq e^{x_0-1} \ln x$ .
- δ) Έστω  $E_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \frac{1}{e}$  και  $E_2$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda > 1$ . Αν τα εμβαδά  $E_1$  και  $E_2$  είναι αντίστροφα, να δείξετε ότι το  $\lambda$  παίρνει μοναδική τιμή το  $2$ .