

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x-\ln x}$, όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0$.

Επιπλέον, δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x>0 \\ \gamma & , x=0 \end{cases}$ με $\gamma\in\mathbb{R}$.

Ακόμα, δίνεται η συνάρτηση $h:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $h(x)=g'(x)-g(x)$, η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,\alpha]$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\gamma=0$.
- β)** **i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x))=f(x)$.
- γ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής, το $(\rho_1, f(\rho_1))$ με $\rho_1\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και το $(\rho_2, f(\rho_2))$ με $\rho_2\in(e, e^2)$.
- δ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, σε σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0\in(\sqrt{e}, e)$.
- ε)** **i.** Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\frac{x^2}{x-\ln x}>\frac{x-1}{x-\ln x}$.
ii. Να δείξετε ότι $\int_1^e f(x)dx>\ln(e-1)$.