

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) = \frac{\ln^2 x + x}{(x + \ln x)^2}$  και  $f(1) = 0$ .

**α)** Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{x \ln x}{x + \ln x}$ .

**β) i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**ii.** Να δείξετε ότι η ( $\varepsilon$ ) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $f$  εκτός από το σημείο επαφής της.

**γ)** Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta\mu \left( \frac{1}{f(x)} \right)$ .

**δ)** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι για κάθε  $\alpha > 0$  ισχύει ότι

$$\int_{f(1)}^{f(\alpha)} f^{-1}(x) dx < \alpha f(\alpha)$$