

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x}{1+x \ln x}$  .

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  .
- β)** **i.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .  
**ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  .  
**iii.** Να λύσετε την εξίσωση  $\ln x = \frac{1}{1+\sin^2 x} - \frac{1}{x}$  .
- γ)** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ)** Έστω η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  .
- i.** Να βρείτε την εφαπτομένη ( $\zeta$ ) της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο της  $(0, g(0))$  .  
**ii.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μοναδική εφαπτομένη ( $\eta$ ) παράλληλη στην εφαπτομένη ( $\zeta$ ) .
- ε)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής.
- στ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^x) = f(e^{-x})$  .