

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x + \beta - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.
- β)** **i.** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ)** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- δ)** Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και να δείξετε ότι η (ζ) βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in (-1, x_0) \cup (x_0, +\infty)$, όπου $(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της με αυτήν.
- ε)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει άλλη εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων εκτός από την εφαπτομένη της στο σημείο της $(0, f(0))$.