

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{(x+\alpha)^2} & , x > 0 \\ \beta & , x = 0 \end{cases}$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και

$\alpha \geq 0$ . Η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $0$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$  και  $\beta = 1$ .
- β)** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο της  $(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 > 0$ , η οποία διέρχεται από το ολικό της μέγιστο.
- δ)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f^{-1}(x)$  έχει μοναδική λύση.