

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} & , x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{x-1}{\ln x} & , x > 1 \end{cases} .$$

- α)**
- i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $1$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $1$ .
- β)**
- i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
  - ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
  - iii.** Αν  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f^{-1}(x)$  έχει μοναδική ρίζα το  $1$ .
- γ)**
- i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-\infty, 1]$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο  $[1, +\infty)$ .
  - iii.** Να δείξετε ότι ισχύει  $x + \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) < 1$  για κάθε  $x < 1$ .
  - iv.** Να δείξετε ότι ισχύει  $4f(e^{x-1})f(2-x) > e^{1-x}(x+1)^2$  για κάθε  $x > 1$ .
- δ)** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.