

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x^3) & , x < 0 \\ 4x\sqrt{x} - 3x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$ .

- α)** **i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$ .  
**ii.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ .
- β)** **i.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.  
**ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
- γ)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{-x}}$ .  
**ii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $h$ .
- δ)** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- ε)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μοναδική εφαπτομένη σε σημείο της  $(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$  η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.