

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(3, f(3))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -1 . Η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
- γ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- δ) Έστω οι συναρτήσεις $g: (-\infty, -4) \cup [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = (x-1)^2$ και $g \circ h = f$.

i. Να δείξετε ότι $g(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x+4}}$.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) + \sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) = 1$ για τις διάφορες του $\lambda \in \mathbb{R}$.