

Δίνεται η συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $f(x)=x\ln x+ax-\alpha$ ,  $\alpha\in\mathbb{R}$  και  $f(x)\geq 0$  για κάθε  $x>0$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha=-1$ .
- β)** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'$  και την ευθεία  $x=\lambda$  με  $0<\lambda<1$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{\lambda\rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .
- γ)** Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa\in\mathbb{R}$ , για τις οποίες η εξίσωση  $e^{\frac{1-\kappa}{x}}=\frac{e}{x}$  με  $x>0$  έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- δ)** Δίνεται η συνάρτηση  $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $g(x)=\begin{cases} e^{1-x}-\frac{1}{x}, & 0<x<1 \\ f(x), & x\geq 1 \end{cases}$ .
- i.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $g$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται.
- iii.** Αν  $g^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $g$ , να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $g$  και  $g^{-1}$  έχουν μοναδικό σημείο τομής.