

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $2f(x)f'(x) = \frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 1$ ,  $f(1) = 0$  και  $f(e) = 1$ .

**α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f^2(x) - \ln x$  είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**β) i.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

**ii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $\frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ .

**γ) i.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της  $f^{-1}$ .

**ii.** Να δείξετε ότι  $f^{-1}(x) > f(x)$  για κάθε  $x \geq 1$ .

**iii.** Να δείξετε ότι  $\int_1^{\sqrt{e}} xf(x) dx < \frac{e^e - e}{2}$ .

**δ) i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**ii.** Έστω  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα

$x'x$  και την ευθεία  $x = \sqrt{e}$ . Να δείξετε ότι  $E < \frac{(\sqrt{2e} + 1)(e - 1)}{2\sqrt{2e}}$ .

**ε)** Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της  $f$  και κάθε χρονική στιγμή βρίσκεται στο σημείο της  $M(x, y)$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσο με  $1 \mu/s$ . Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε σημείο με τετμημένη  $a$ . Να βρείτε το σημείο  $M$  για το οποίο ο ρυθμός μεταβολής της  $a$  γίνεται μέγιστος.

**στ) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $\varphi = (-f) \circ h$  με  $h(x) = e^{-x}$ .

**ii.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x \ln x + 2 \ln x - 1 = 0$  έχει μοναδική λύση  $\xi$  με  $\xi \in (1, \sqrt{e})$ .

**iii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $\varphi$  έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(\xi, f(\xi))$ .