

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f:(-\infty, e] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha x + \beta & , x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + \gamma & , x \geq 1 \end{cases}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} .$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(1, f(1))$  έχει εξίσωση  $y = x - 1$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$  και  $\gamma = 0$ .
- β)**
- i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της  $f$  και της αντίστροφής της  $f^{-1}$  έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (-1, 0)$ .
  - iii.** Έστω η συνάρτηση  $g:(-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f^{-1}(x) + \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τον τύπο της  $g$  και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$  για τις οποίες υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- γ)**
- i.** Να βρείτε την αρχική  $F$  της  $f$  η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο πάνω στον άξονα  $x'x$ .
  - ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία  $x = e$ .