

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 (\ln x - 1)^2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο το α στο α .

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- β)** Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε δύο σημεία της.
- γ)** Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \geq 0$ για τις οποίες η εξίσωση $|1 - \ln x| = \frac{\sqrt{\kappa}}{x}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- δ)** Να βρείτε την άλλη εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε άλλο ένα σημείο εκτός από την αρχή των αξόνων και το σημείο επαφής.
- ε)** Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < e$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- στ)** Έστω η συνάρτηση $g: [e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων της g και της αντίστροφής της g^{-1} .