

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-ax-\ln x$, $a\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

- α)**
- i.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $1-x^2-\ln x=0$ έχει μοναδική λύση το 1.
 - ii.** Να δείξετε ότι $a=1$.
- β)** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}+2$, η οποία έχει σημείο καμπής πάνω στον άξονα $x'x$.
- i.** Να βρείτε τον τύπο της f .
 - ii.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφής της f^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$.
 - iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τους άξονες $x'x$ και yy' και την ευθεία $x=f(e)$.
- γ)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ\varphi$ όπου $\varphi(x)=\frac{1}{x}$.
 - ii.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει δύο εφαπτομένες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.